Capitolo 1

Il sistema dei numeri reali

1 Proprietà elementari dei numeri reali

I numeri reali sono un insieme $\mathbf{R}$ con le seguenti strutture:

(A) Un *ordinamento totale*, cioè una relazione $\leqslant$ (si legga minore o uguale) tra coppie di elementi di $\mathbf{R}$, che goda delle seguenti proprietà:

(A_1) Per ogni coppia a, b di numeri reali si ha $a \leqslant b$ oppure $b \leqslant a$ (dicotomia).

(A_2) Le relazioni $a \leqslant b$ e $b \leqslant c$ implicano $a \leqslant c$ (proprietà transitiva).

(A_3) Le relazioni $a \leqslant b$ e $b \leqslant a$ implicano $a = b$ (proprietà antisimmetrica).

(A_4) Per ogni a appartenente a $\mathbf{R}$ (in simboli $a \in \mathbf{R}$), risulta $a \leqslant a$ (proprietà riflessiva).

(B) Un'*addizione*, cioè un'applicazione che ad ogni coppia di numeri reali a, b fa corrispondere un numero reale, che si indica con $a + b$, con le proprietà:

(B_1) Per ogni a, $b \in \mathbf{R}$ si ha $a + b = b + a$ (proprietà commutativa della somma).

(B_2) Per ogni a, b, $c \in \mathbf{R}$ si ha $a + (b + c) = (a + b) + c$ (proprietà associativa della somma); si può dunque scrivere senza ambiguità $a + b + c$.

(B_3) Esiste un unico elemento 0 (zero) tale che per ogni $a \in \mathbf{R}$, $0 + a = a + 0 = a$.

(B_4) Per ogni $a \in \mathbf{R}$ esiste un unico opposto $-a \in \mathbf{R}$ tale che $a + (-a) = 0$. In genere, si scrive $b - a$ invece di $b + (-a)$.

(C) Una *moltiplicazione*, che ad a, $b \in \mathbf{R}$ fa corrispondere un elemento di $\mathbf{R}$, indicato con $a \times b$, o più brevemente con ab, e che verifichi:

(C_1) Per ogni a, $b \in \mathbf{R}$ si ha $ab = ba$ (proprietà commutativa del prodotto).

(C_2) Per ogni a, b, $c \in \mathbf{R}$ si ha $a(bc) = (ab)c$ (proprietà associativa del prodotto); si può dunque scrivere abc senza ambiguità.

(C_3) Esiste un unico elemento 1 (uno), diverso da 0, tale che $1a = a1 = a$, per ogni $a \in \mathbf{R}$.

(C_4) Per ogni $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, esiste un unico elemento a^{-1} (inverso di a) tale che $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$; l'elemento a^{-1} si indica anche con $1/a$.

Per quanto riguarda i rapporti fra le strutture (A), (B) e (C), si hanno le seguenti proprietà:

(AB) La relazione $a \leqslant b$ implica $a+c \leqslant b+c$, per ogni $c \in \mathbf{R}$.
(AC) Le relazioni $0 \leqslant a$ e $0 \leqslant b$ implicano $0 \leqslant ab$.
(BC) Per ogni $a, b, c \in \mathbf{R}$ si ha $a(b+c)=ab+ac$ (proprietà distributiva).

Dalle proprietà sopra enunciate si possono ricavare facilmente le usuali regole di operazioni con i numeri reali. Non ci dilunghiamo su tali questioni. Osserviamo invece che queste proprietà, insieme all'assioma di Dedekind (vedi § 3) caratterizzano completamente i numeri reali.

Osservazione 1.1. A voler essere più precisi (o più pignoli) si dovrebbe dire che i numeri reali sono un sistema $(\mathbf{R}, \leqslant, +, \times, 0, 1)$ dove $\mathbf{R}$ è un insieme, $\leqslant$ è un ordinamento totale su $\mathbf{R}$, e $+$ e $\times$ sono due leggi di composizione interna, di elementi neutri rispettivamente 0 e 1, verificanti gli assiomi sopra riportati e l'assioma di Dedekind (D).

Si può dimostrare che gli assiomi (A), (B), (C) e (D) caratterizzano completamente il sistema dei numeri reali, nel senso che se $(\mathbf{R}^1, \leqslant^1, +^1, \times^1, 0^1, 1^1)$ è un secondo sistema verificante gli stessi assiomi, esiste una corrispondenza biunivoca tra $\mathbf{R}$ ed $\mathbf{R}^1$ tale che i corrispondenti di 0 e 1 sono esattamente 0^1 e 1^1, e che se indichiamo con a^1, b^1 ecc. gli elementi di $\mathbf{R}^1$ corrispondenti ad a, b ecc. di $\mathbf{R}$, si ha:

(a) $a \leqslant b \Leftrightarrow a^1 \leqslant^1 b^1$
(b) $(a+b)^1 = a^1 +^1 b^1$ (in altre parole, l'elemento corrispondente ad $a+b$ è $a^1 +^1 b^1$)
(c) $(a \times b)^1 = a^1 \times^1 b^1$. ■

Esercizi

1.1 Si dimostrino le seguenti proprietà di $\mathbf{R}$:

(a) per ogni $a \in \mathbf{R}$ risulta $a0=0$;
(b) se $ab=0$ allora è $a=0$ oppure $b=0$;
(c) se $a \geqslant 0$, allora $-a \leqslant 0$;
(d) se $a \leqslant b$ e $c<0$, allora $ac \geqslant bc$;
(e) per ogni $a \in \mathbf{R}$, $a^2 \geqslant 0$.

2 Il valore assoluto

Sia $a \in \mathbf{R}$. Si definisce *valore assoluto* (o *modulo*) di a il massimo tra i due numeri a e $-a$:

$$|a| = \max\{a, -a\} = \begin{cases} a & \text{se} \quad a \geqslant 0 \\ -a & \text{se} \quad a<0. \end{cases}$$

Si deduce immediatamente dalla definizione che $|a| \geqslant 0$, e che $|a|=0$ se e solo se $a=0$. Si ha inoltre $|-a|=|a|$, e

$$a \leqslant |a|; \quad -a \leqslant |a|.$$

Siano ora a e b due numeri reali. Dalla proprietà (AB) e dalla relazione $b \leqslant |b|$ segue che

$$a+b \leqslant a+|b| \leqslant |a|+|b|,$$
$$-(a+b) = -a+(-b) \leqslant |-a|+|-b| = |a|+|b|.$$

Ricordando che $|a+b| = \max\{(a+b), -(a+b)\}$, si deduce dalle precedenti relazioni la *disuguaglianza triangolare*:

$$|a+b| \leqslant |a|+|b|. \qquad [2.1]$$

Se ora in quest'ultima relazione poniamo $a+b=-c$ (e dunque $b=-c-a$), e ricordiamo che $|-a|=|a|$, otteniamo $|c| \leqslant |a|+|a+c|$, e dunque

$$|a+c| \geqslant |c|-|a|. \qquad [2.2]$$

Viceversa, da quest'ultima relazione si può risalire alla [2.1] sostituendo a c il suo valore $-a-b$; cosicché le [2.1] e [2.2] sono due relazioni equivalenti. Naturalmente possiamo scambiare tra loro a e c nella [2.2], e ottenere la relazione equivalente

$$|a+c| \geqslant |a|-|c|,$$

da cui, confrontando con la [2.2], si ottiene

$$|a+c| \geqslant \big||a|-|c|\big|. \qquad [2.3]$$

Siano ora $x, y \in \mathbf{R}$. Si definisce *distanza* tra x e y il numero reale

$$d(x,y) = |x-y|. \qquad [2.4]$$

Si verificano facilmente le seguenti proprietà:

(d_1) $d(x,y) \geqslant 0$; $d(x,y)=0$ se e solo se $x=y$.
(d_2) $d(x,y)=d(y,x)$.
(d_3) Per ogni $z \in \mathbf{R}$, $d(x,y) \leqslant d(x,z)+d(z,y)$ (*disuguaglianza triangolare*).

Se $x_0 \in \mathbf{R}$ e $r>0$, chiameremo *intorno sferico* di centro x_0 e di raggio r l'insieme di tutti i numeri reali che distano da x_0 meno di r; in simboli:

$$I(x_0, r) = \{x \in \mathbf{R} : d(x, x_0) < r\} = \{x \in \mathbf{R} : |x-x_0| < r\}.$$

Esercizi

2.1 Si simostri la disuguaglianza $\big||a|-|b|\big| \leqslant |a-b| \leqslant |a|+|b|$.

2.2 Si trovino gli $x \in \mathbf{R}$ per i quali è verificata la disuguaglianza:

(a) $|x-1| \leqslant |x+2|$
(b) $x+3 > |x-2|$
(c) $x+|x-1| \geqslant 3$
(d) $x|x+1| > 3$
(e) $|x|+|x+2| \geqslant 1$
(f) $-1 < x+|x-2| < 3$
(g) $\dfrac{x-2}{x+3} < \dfrac{x+1}{x}$
(h) $\dfrac{2}{x}-3 < \dfrac{4}{x}+1$
(i) $x^2+x+1 \leqslant 1$
(l) $\dfrac{x+1}{3x-2} \leqslant 5.$

2.3 Si dimostri che la distanza $d(x, y)=|x-y|$ gode delle proprietà (d_1), (d_2) e (d_3).

2.4 Si dimostrino le seguenti disuguaglianze:

(a) $x^2-2xy+y^2 \geqslant 0$
(b) $x^4-3x^3+4x^2-3x+1 \geqslant 0$
*(c) $x^{2n}+x^{2n-1}+x^{2n-2}+\ldots+x^2+x+1 \geqslant 0.$

***2.5** Si dimostri che, per ogni $\epsilon > 0$, si ha

$$2ab \leqslant \epsilon a^2+\frac{1}{\epsilon} b^2.$$

2.6 Si dimostri che per ogni $a, b \in \mathbf{R}$ e per ogni λ, $0<\lambda<1$, risulta

$$(a+b)^2 \leqslant \frac{a^2}{\lambda}+\frac{b^2}{1-\lambda}.$$

(Si usi il risultato dell'esercizio precedente.)

***2.7** Dimostrare che se a, b e c sono positivi si ha:

(a) $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca$
(b) $(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc$
(c) $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geqslant abc(a+b+c).$

2.8 Trovare un numero M tale che risulti:

(a) $\dfrac{x+2}{x-4} < M$ per ogni $x \in [5,8]$, $5 \leqslant x \leqslant 8$;
(b) $\dfrac{x+1}{x-2} > M$ per ogni $x \in (0,1)$, $0<x<1.$

2.9 Dimostrare che

$$\delta(x, y)=\sqrt{|x-y|}$$

è una distanza in $\mathbf{R}$, e cioè che verifica le relazioni (d_1), (d_2) e (d_3).

2.10 Dire se sono distanze in $\mathbf{R}$ le seguenti espressioni:

(a) $d(x, y)=|x-y|^2$
(b) $d(x, y)=\begin{cases} 0 & \text{se } x=y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$
(c) $d(x, y)=|x+y|.$

2.11 Si dimostri che $|x+y+z| \leqslant |x|+|y|+|z|$. Generalizzare.

3 L'assioma di Dedekind

Gli assiomi del precedente paragrafo 1 riguardano solo la struttura "algebrica" di $\mathbf{R}$, e sono ancora insufficienti a descrivere completamente (e dunque a caratterizzare) il sistema dei numeri reali. Quello che manca è un assioma che renda conto di una delle più importanti proprietà dei numeri reali: *la continuità*, una proprietà che li distingue da altre classi di numeri (come ad esempio i numeri razionali, che ne sono privi) e che li rende lo strumento più adatto per le necessità dell'analisi non appena si passi dalle operazioni algebriche elementari (somma, prodotto ecc.) allo studio di relazioni più complesse.

E' difficile apprezzare debitamente la portata dell'assioma di continuità, o assioma di Dedekind; anzi, molte volte si è indotti a considerare la continuità come una proprietà talmente naturale da non richiedere un assioma specifico. Non sarà dunque privo di interesse un confronto tra i numeri reali (che verificano l'assioma di Dedekind) e i razionali (che non godono della stessa proprietà), anche limitato al solo problema dell'estrazione di radici.

Cominciamo con l'osservare come sia possibile considerare i numeri interi come una sottoclasse dei numeri reali. Infatti, poiché $1 \in \mathbf{R}$ (assioma C_3), apparterranno a $\mathbf{R}$ i numeri $1+1$ $(=2)$; $2+1$ $(=3)$, e così via,[1] e cioè i numeri naturali (interi non negativi).

L'insieme dei numeri naturali verrà indicato con $\mathbf{N}$; tali numeri, considerati insieme allo zero e ai loro opposti $-1, -2, -3$ ecc. (assioma B_4) costituiscono l'insieme degli interi relativi (positivi e negativi), che si indica con $\mathbf{Z}$.

Si noti che in $\mathbf{N}$ e in $\mathbf{Z}$ sono definiti sia un ordinamento che una somma e un prodotto, ma che essi non godono di tutte le proprietà elencate nel paragrafo 1. Ad esempio, in $\mathbf{N}$ non sono verificate le (B_3) e (B_4) (infatti la sottrazione $b-a$ sarà

[1] Questo "e così via" nasconde più di una difficoltà, ma per il momento vi passeremo sopra. Una costruzione rigorosa dei numeri naturali a partire dagli assiomi di $\mathbf{R}$ verrà discussa nel paragrafo 6.

possibile solo quando $b \geqslant a$), né la (C_4) (cosicché la divisione è possibile solo quando il dividendo è multiplo del divisore).[2] Se si passa da $\mathbf{N}$ a $\mathbf{Z}$ la sottrazione è sempre possibile, mentre permangono le difficoltà connesse con la divisione.

Per arrivare a un sistema numerico che goda delle proprietà indicate nel paragrafo 1 occorre considerare l'insieme $\mathbf{Q}$ dei numeri razionali.

Un numero reale a si dirà *razionale* se è quoziente di due interi, cioè se esistono due interi p e q tali che $a = p/q = pq^{-1}$. In simboli:

$$\mathbf{Q} = \{a \in \mathbf{R};\quad a = p/q;\quad p, q \in \mathbf{Z}\}.$$

Si noti che l'espressione di un numero razionale come rapporto di due interi non è unica; ad esempio, $3/4$, $6/8$, $-9/-12$ rappresentano lo stesso numero razionale. Più in generale, p/q e r/s denotano lo stesso numero razionale non appena $ps = rq$ (osservazione, questa, che verrà ripresa in seguito).

Con l'allargamento del sistema numerico fino a comprendere i numeri razionali, le proprietà del paragrafo 1 sono soddisfatte: è facile infatti vedere che la somma (e il prodotto) di due numeri razionali è un numero razionale, come pure razionali sono l'opposto e l'inverso di un numero razionale.

Tuttavia i numeri razionali sono ancora insufficienti alle necessità dell'analisi matematica. Ad esempio, l'estrazione di radice non è sempre possibile in $\mathbf{Q}$.

Proposizione 3.1 *Non esiste alcun numero razionale a tale che* $a^2 = 2$.

Dimostrazione. Se un tal numero esistesse, si potrebbero trovare due interi p e q, primi tra loro, tali che $p^2 = 2q^2$. Poiché il secondo membro è divisibile per 2, dovrà esserlo anche p^2, e dunque anche p; sarà allora $p = 2s$, da cui segue $2s^2 = q^2$. Con lo stesso ragionamento si può concludere che anche q è pari, contro l'ipotesi che p e q fossero primi tra loro. ∎

Una conseguenza della proposizione precedente è che gli assiomi (A) (B) e (C) non sono sufficienti da soli a caratterizzare un sistema numerico abbastanza versatile da permettere, ad esempio, operazioni algebriche quali l'estrazione di radice. Si rende necessario dunque postulare ulteriori proprietà che facciano superare le limitazioni derivanti dalla relativa povertà del sistema di assiomi del paragrafo 1. E' esattamente questo il ruolo svolto dal cosiddetto "assioma di Dedekind".

Ricordiamo che se A e B sono sottoinsiemi di $\mathbf{R}$ (in simboli, $A \subset \mathbf{R}$ e $B \subset \mathbf{R}$), si chiama *unione* di A e B l'insieme $A \cup B$ i cui elementi sono tutti gli elementi di A o di B:

$$A \cup B = \{x \in \mathbf{R} : x \in A \text{ oppure } x \in B\},$$

[2] Si osservi che la sottrazione e la divisione sono in $\mathbf{R}$ concetti secondari, derivati rispettivamente da quelli di opposto e inverso. Se invece ci si limita agli interi, in cui non esistono né opposto né inverso, queste operazioni (quando sono possibili) dovranno essere definite in maniera differente a partire dagli assiomi di $\mathbf{N}$.

mentre si chiama *intersezione* di A e B l'insieme $A \cap B$ costituito dagli elementi comuni di A e B:

$$A \cap B = \{x \in \mathbf{R} : x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

Se non vi sono elementi comuni ad A e B, scriveremo $A \cap B = \varnothing$ (insieme vuoto).

Definizione 3.1 *Siano A e B due sottoinsiemi non vuoti di* $\mathbf{R}$. *Diremo che* (A, B) *è una sezione di* $\mathbf{R}$ *se:*

$$A \cup B = \mathbf{R} \text{ e } A \cap B = \varnothing; \qquad [3.1]$$

$$\text{per ogni } a \in A \text{ e per ogni } b \in B \text{ si ha } a < b. \qquad [3.2]$$

Ad esempio una sezione di $\mathbf{R}$ si ottiene prendendo

$$A = \mathbf{R}^+ = \{x \in \mathbf{R} : x > 0\}.$$

$$B = \overline{\mathbf{R}^-} = \{x \in \mathbf{R} : x \leqslant 0\}.$$

Il seguente assioma caratterizza il sistema dei numeri reali:

(D) **(Assioma di Dedekind)** *Per ogni sezione* (A, B) *in* $\mathbf{R}$ *esiste un unico numero reale L tale che*

$$a \leqslant L \leqslant b \quad \text{per ogni } a \in A \text{ e per ogni } b \in B. \qquad [3.3]$$

Il numero L si chiama elemento separatore delle classi A e B.

Si è soliti enunciare la proprietà (D) dicendo che i numeri reali sono continui, o che non hanno lacune; non così i numeri razionali, che invece non soddisfano all'assioma di continuità (D).

Consideriamo infatti in $\mathbf{Q}$ le classi:

$$A = \{q \in \mathbf{Q} : q < 0\} \cup \{q \in \mathbf{Q} : q \geqslant 0, q^2 < 2\}$$

$$B = \{q \in \mathbf{Q} : q \geqslant 0, q^2 \geqslant 2\}.$$

Si vede facilmente che $A \cup B = \mathbf{Q}$ e $A \cap B = \varnothing$, inoltre se $a \in A$ e $b \in B$ si ha $a < b$. Ne segue che (A, B) è una sezione di $\mathbf{Q}$.

Facciamo vedere che non c'è un elemento separatore in $\mathbf{Q}$. Infatti, se un tale elemento L esistesse dovrebbe appartenere ad A o a B. Supponiamo che appartenga ad A. Poiché non può essere $L < 0$, si dovrà avere $L^2 \leqslant 2$. D'altra parte non può essere $L^2 = 2$, a causa della proposizione 3.1, e dunque $L^2 < 2$.

Sia ora N un numero intero maggiore di $(2L+1)/(2-L^2)$ (vedi più oltre, proposizione 4.3); si ha

$$\left(L + \frac{1}{N}\right)^2 = L^2 + \frac{1}{N^2} + \frac{2L}{N} < L^2 + \frac{2L+1}{N} < 2$$

per cui $L + 1/N \in A$. Ma questo è impossibile, perché contraddice la [3.3]. Analogamente si esclude il caso $L \in B$, cosicché l'insieme $\mathbf{Q}$ non ha la proprietà di Dedekind.

Esercizi

3.1 Si dimostri che i seguenti numeri non sono razionali:

(a) $\sqrt{3}$
(b) $\sqrt{n}$, se n non è un quadrato perfetto
(c) $\sqrt[3]{3}$
*(d) $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$
(e) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

***3.2** Nel piano cartesiano si indichi con $\mathbf{Z}^2$ l'insieme dei punti (x, y) con coordinate intere. Dimostrare che un triangolo con i vertici in $\mathbf{Z}^2$ non può essere equilatero (si usi il fatto che $\sin \pi/3 = \sqrt{3}/2$ è irrazionale).

4 Estremo superiore e inferiore di un insieme di numeri reali

Sia A un insieme di $\mathbf{R}$, e supponiamo che esista il massimo di A, cioè che ci sia un numero $L \in A$ tale che per ogni elemento $a \in A$ si abbia $L \geqslant a$.

Le proprietà che caratterizzano L sono dunque:

(M_1) Per ogni $a \in A$ si ha $a \leqslant L$, ossia L è un maggiorante di A.
(M_2) $L \in A$; quindi in particolare non esistono maggioranti di A che siano più piccoli di L.

In altre parole il massimo di A, se esiste, è il più piccolo dei maggioranti di A. Analogamente il minimo di A, se esiste, è il più grande dei minoranti di A.

Si noti che non tutti gli insiemi hanno massimo; ad esempio un intervallo aperto

$$(a, b) = \{x \in \mathbf{R} : a < x < b\}$$

non ha né massimo né minimo.

D'altra parte, come vedremo, per ogni insieme limitato A esiste il minimo dei maggioranti e il massimo dei minoranti; questi vengono chiamati rispettivamente *estremo superiore* ed *estremo inferiore* di A, e coincidono col massimo e col minimo di A quando questi ultimi esistono.

Consideriamo un insieme $A \subset \mathbf{R}$; esso si dirà *limitato superiormente* se ammette un maggiorante, cioè se esiste un $M \in \mathbf{R}$ tale che, per ogni $a \in A$, si abbia $a \leqslant M$. Analogamente A si dirà *limitato inferiormente* se esiste un minorante di A, cioè un $m \in \mathbf{R}$ tale che $m \leqslant a$ per ogni $a \in A$.

Infine un insieme limitato sia superiormente che inferiormente si dirà *limitato*. Dalla proprietà (D) segue la:

Proposizione 4.1. *Sia $A \subset \mathbf{R}$ un insieme limitato superiormente. L'insieme dei maggioranti di A, $\mathscr{M}(A)$, ha minimo.*

Dimostrazione. Indichiamo con $\mathscr{M}'$ il complementare di $\mathscr{M}(A)$[3], e facciamo vedere che la coppia $(\mathscr{M}', \mathscr{M}(A))$ forma una sezione di $\mathbf{R}$. Le relazioni [3.1] sono ovvie, dato che ogni numero reale appartiene o ad $\mathscr{M}(A)$ o ad $\mathscr{M}'$. Per dimostrare la [3.2] si considerino due numeri, $\mu \in \mathscr{M}'$ ed $m \in \mathscr{M}(A)$. Poiché μ non è un maggiorante, esisterà un $a \in A$ tale che $\mu < a$. D'altra parte m è un maggiorante di A, e dunque dovrà essere $a \leqslant m$. Ne segue che $\mu < m$, e dunque la [3.2].

Sia L l'elemento separatore delle classi $\mathscr{M}'$, $\mathscr{M}(A)$. Dobbiamo far vedere che L è un maggiorante di A, e cioè che $L \in \mathscr{M}(A)$.

Infatti, se L non fosse un maggiorante, esisterebbe un $a \in A$ maggiore di L. Risulta

$$L < \frac{L+a}{2} < a.$$

Poiché $a \in A$, $(L+a)/2$ non è un maggiorante di A, e dunque appartiene a $\mathscr{M}'$. Ma allora L sarebbe più piccolo di un numero di $\mathscr{M}'$, e dunque non potrebbe essere l'elemento separatore delle due classi $\mathscr{M}'$ ed $\mathscr{M}(A)$, contro l'ipotesi. ■

In maniera analoga si dimostra che se A è un insieme limitato inferiormente, allora l'insieme dei minoranti di A ha massimo.

Possiamo allora dare la seguente

Definizione 4.1 *Sia $A \subset \mathbf{R}$ un insieme limitato superiormente. Diremo estremo superiore di A il minimo dei maggioranti di A. Analogamente se $A \subset \mathbf{R}$ è limitato inferiormente, chiameremo estremo inferiore di A il massimo dei minoranti di A.*

L'estremo superiore e l'estremo inferiore di A si indicano rispettivamente con i simboli

$$\sup A \quad \text{e} \quad \inf A.$$

Si ha evidentemente, per ogni insieme A non vuoto,

$$\inf A \leqslant \sup A$$

dato che, se $x \in A$, risulta $\inf A \leqslant x \leqslant \sup A$.

La proposizione 4.1 si può riformulare dicendo che ogni insieme limitato superiormente ha estremo superiore e ogni insieme limitato inferiormente ha estremo inferiore.

Si ha la seguente

Proposizione 4.2 *Sia $A \subset \mathbf{R}$ un insieme limitato superiormente. Il numero reale $L = \sup A$ è caratterizzato dalle proprietà:*

(S_1) *Per ogni $a \in A$ si ha $a \leqslant L$.*
(S_2) *Per ogni $\lambda < L$ esiste un $a \in A$ tale che $\lambda < a$.*

[3] Si dice *complementare* di un insieme P di $\mathbf{R}$ l'insieme dei punti di $\mathbf{R}$ che non appartengono a P:

$$\mathscr{C}P = \{x \in \mathbf{R} : x \notin P\}.$$

Dimostrazione. Infatti la proprietà (S_1) equivale a dire che L è un maggiorante di A, mentre la (S_2) afferma che nessun numero inferiore a L è un maggiorante di A. ■

Osservazione 4.1. E' comodo parlare di estremo superiore e di estremo inferiore di un qualunque sottoinsieme non vuoto A di $\mathbf{R}$. Se A è limitato superiormente si è già visto che $\sup A$ è il minimo dei maggioranti di A; *se A non è limitato superiormente, porremo*

$$\sup A = +\infty.$$

Analogamente, *se A non è limitato inferiormente, scriveremo*

$$\inf A = -\infty. \ ■$$

Esempio 4.1
Consideriamo l'intervallo aperto di estremi a e b:

$$(a, b) = \{x \in \mathbf{R} : a < x < b\}.$$

L'insieme dei maggioranti di (a, b) è

$$\mathcal{M}((a, b)) = \{x \in \mathbf{R} : x \geqslant b\} = [b, +\infty).$$

Infatti, ogni $M \geqslant b$ è evidentemente un maggiorante, mentre se $a < \lambda < b$, λ non è un maggiorante, in quanto il numero $(\lambda + b)/2$ appartiene a (a, b) ed è maggiore di λ; se poi $\lambda \leqslant a$, allora λ è addirittura un minorante di (a, b) e quindi non è un maggiorante.
Si ha allora

$$\sup(a, b) = b. \ ■$$

Esempio 4.2
Consideriamo l'insieme

$$A = \{x \in \mathbf{R} : x = n - \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots\}.$$

L'insieme A è formato dai numeri

$$0, 2 - \frac{1}{2}, 3 - \frac{1}{3}, \dots, n - \frac{1}{n}, \dots$$

e non è limitato superiormente. Infatti, comunque si fissi un numero M, detto n un intero più grande di $M + 1$ (vedi proposizione 4.3), si ha

$$n - \frac{1}{n} > n - 1 > M,$$

e dunque M non è un maggiorante di A. Ne segue

$$\sup A = +\infty.$$

Per quanto riguarda l'estremo inferiore, basta osservare che tutti gli elementi di A sono non negativi, e che $0 \in A$. Allora 0 è il minimo di A e quindi anche l'estremo inferiore. ■

Vogliamo ora dimostrare alcune proprietà dei numeri reali legate ai concetti di estremo superiore e inferiore, e quindi in ultima analisi derivanti dalla proprietà (D). Cominciamo con il cosiddetto "assioma di Archimede":

Proposizione 4.3 *Per ogni coppia a, b di numeri reali positivi, esiste un intero positivo N tale che $Na > b$.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esistano due reali positivi a, b tali che

$$na \leqslant b \quad \text{per ogni intero positivo } n.$$

E' dunque limitato superiormente l'insieme

$$A = \{x \in \mathbf{R} : x = na, \quad n \in \mathbf{N}\}.$$

dato che esso ammette b come maggiorante. Sia $L = \sup A$. Si ha per ogni $m \in \mathbf{N}$

$$(m + 1)a \leqslant L,$$

ovvero

$$ma \leqslant L - a \quad \text{per ogni} \quad m \in \mathbf{N}.$$

Ma allora $L - a$ sarebbe un maggiorante di A, più piccolo di $\sup A$; il che è assurdo. ■

Una conseguenza della proposizione 4.3 è che l'insieme dei numeri razionali $\mathbf{Q}$ è *denso* in $\mathbf{R}$.

Proposizione 4.4 *Dati comunque due numeri reali a e b, con $a < b$, esiste sempre un numero razionale r compreso tra a e b.*

Dimostrazione. Possiamo supporre che a e b siano positivi. Sia N un intero maggiore di $1/(b - a)$ (la cui esistenza è garantita dalla proposizione precedente) e consideriamo la successione di numeri razionali $1/N, 2/N, \dots, i/N, \dots$. Di questi solo un numero finito è minore o uguale ad a. Sia k/N il più grande di essi; il numero $r = (k + 1)/N$ è compreso tra a e b. Infatti si ha per costruzione $r > a$; se fosse $r \geqslant b$ risulterebbe

$$\frac{1}{N} = r - \frac{k}{N} \geqslant b - \frac{k}{N} \geqslant b - a$$

e dunque

$$N \leqslant \frac{1}{b - a},$$

mentre si ha la disuguaglianza opposta. ■